ACADEMIC REPORTS Fac. Eng. Tokyo Polytech. Univ. Vol. 30 No.1 (2007)

An Elementary Proof of the Generalized Laplace Expansion Formula for Permanents

Yoshiaki UENO *, Kazuhisa MAEHARA †

概要

In the previous article (2002), we gave an elementary proof of the generalized Laplace expansion formula for determinants. In this article we prove the generalized Laplace-type developement and the formula for the permanent of products of matrices, which share the same tune with the formulas for determinants.

1 パーマネントの定義

行列式の定義において $\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ の代わりに自明な準同型 $S_n \to \{1\}$ を用いるとパーマネント (permanent) が得られる。

Definition 1.1. *[1]* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ を標準基底とする。$\mathbf{a}_1 = \sum_j x_{1j}\mathbf{e}_j, \cdots, \mathbf{a}_n = \sum_j x_{nj}\mathbf{e}_j$ と任意のベクトルを *1* 次結合でかくとき，

$$\mathrm{Per}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

をパーマネントという。

[2] 与えられた基底に対して，パーマネントは対称 n 重線形形式である。

[3] すべての $\sigma \in S_n$ に対して $\mathrm{Per}(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \cdots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = \mathrm{Per}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)$ かつ ρ が $\mathrm{Map}(\{1, \cdots\}, \{1, \cdots, n\})$ の全射ではないとき，$\mathrm{Per}(e_{\rho(1)}, \cdots, e_{\rho(n)}) = 0$ とする。$\cdots\cdots$ （$*$）

[4] $\mathrm{Per}(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$ を正規性という。

[5] $\{1, 2, \cdots, n\}$ の s 個の部分集合 Y，X の順列 $I = (i_1 i_2 \cdots i_s)$，$J = (j_1 j_2 \cdots j_s)$ に対して，$a_{IJ} = a_{i_1 j_1}\, a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_s j_s}$ と記す。$\sum_{\sigma \in S_Y} a_{\sigma IJ}$ を (IJ) 小パーマネント *(minor permanents)* といい，A_{IJ} とかく。実際は順列のとりかたによらないので，A_{YX} と書いてもよい。

2 パーマネントの性質

命題 1. *[1]* 逆に f が n 重線形形式かつ標準基底に対して（$*$）の性質がみたされるなら

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2,\, \cdots,\, \mathbf{a}_n) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Map}(\{1,\cdots,n\},\{1,\cdots,n\})} f(e_{\sigma(1)},\, e_{\sigma(2)},\, \cdots,\, e_{\sigma(n)})\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= f(e_1,\, e_2,\, \cdots,\, e_n) \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= f(e_1,\, e_2,\, \cdots,\, e_n)\, \mathrm{Per}(\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2,\, \cdots,\, \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

[2] よって，n 重線形形式かつ（$*$）の性質と正規性 $f(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$ によってパーマネントが特徴づけられる。

[3] 正方行列 A から $I = (i_1 \cdots i_p)$ 行，$J = (j_1 \cdots j_p)$ 列を取り出した行列のパーマネントを小パーマネント *(Minor permanent)* といい，A_{IJ} とかく。

---

* Associate professor, General Education and Research Center, Tokyo Polytechnic University
† Associate professor, General Education and Research Center, Tokyo Polytechnic University
Received Sept. 20, 2007

命題 2. *[1]* 行列の転置に関する不変性，すなわち

$$\mathrm{Per}({}^tA) = \mathrm{Per}(A)$$

[2] n 次正方行列 A が与えられたとする。（A の列の分割）n を自然数 n_1, n_2, $\cdots$, n_s に分割すると $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ となる。そのとき，集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ を n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_s 個の部分集合 X_1, X_2, $\cdots$, X_s に分割する。X_1, X_2, $\cdots$, X_s の順列 $J_1, J_2, \cdots, J_s$ を固定する。（たとえば，J_i は X_i の各元を小さい順に並べてできる順列とする。）そのとき，次の展開式を得る。

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{(I_1, I_2, \cdots, I_s)} A_{I_1 J_1} A_{I_2 J_2} \cdots A_{I_s J_s}$$

ここに，（A の行の分割）和の項数は $n!/(n_1!\, n_2! \cdots n_s!)$ であり，$\{1, 2, \cdots, n\}$ の n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_s 個の部分集合 Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_s への分割の数である。I_1, I_2, $\cdots$, I_s は Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_s の順列のひとつとする。そして，A_{IJ} は小パーマネントとする。行と列の役割を代えてもよいので，つぎも成り立つ。

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{(J_1, J_2, \cdots, J_s)} A_{I_1 J_1} A_{I_2 J_2} \cdots A_{I_s J_s}$$

(証明）A の列を n_1, n_2, $\cdots$, n_s と分割する。分割のそれぞれに対するひとつの順列を J_1, $\cdots$, J_s として固定する。パーマネントの定義

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, a_{\sigma(3)3} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

において，積の順番は交換可能であることに注意すると，パーマネントは次のようにかける。

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma J_1 J_1} a_{\sigma J_2 J_2} \cdots a_{\sigma J_s J_s}$$

$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ を n_1, n_2, $n_3, \cdots$, n_s $(n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_s$）に分割する。そのときの分割の数は $n!/(n_1!\, n_2!\, n_3! \cdots n_s!)$ である。その分割の 1 つを Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_s とする。Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_s の順列 I_1,I_2,$I_3, \cdots$,I_s をそれぞれ 1 つとる。すなわち，$(I_1, I_2, I_3, \cdots, I_s)$ は $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ の順列である。このとき，$n! = n!/(n_1!\, n_2!\, n_3! \cdots n_s!) \times n_1!\, n_2!\, n_3! \cdots n_s!$ に注意する。

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma J_1 J_1} a_{\sigma J_2 J_2} \cdots a_{\sigma J_s J_s}$$

$\{\sigma \in S_n |\, \sigma(J_1) = I_1, \sigma(J_2) = I_2, \cdots, \sigma(J_s) = I_s\} \cong S_{Y_1} \times S_{Y_2} \times S_{Y_3} \cdots \times S_{Y_s}$ の個数は $n_1\, !n_2!\, n_3! \cdots n_s!$ である。

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{(I_1, I_2, I_3, \cdots, I_s)} \sum_{\sigma_1 \in S_{Y_1}} \sum_{\sigma_2 \in S_{Y_2}} \cdots \sum_{\sigma_s \in S_{Y_s}} a_{\sigma_1 I_1 J_1}\, a_{\sigma_2 I_2 J_2} \cdots a_{\sigma_s I_s J_s}$$

ここに，$\sum_{\sigma_i \in S_{Y_i}} a_{\sigma_i(I_i) J_i} = A_{I_i, J_i}$ である。

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{(I_1, I_2, \cdots, I_s)} A_{I_1 J_1} A_{I_2 J_2} \cdots A_{I_s J_s}$$

[3] 各型がそれぞれ (n, α),(α, β),$\cdots$, (γ, n) 型の行列 A, B, $\cdots$,C が与えられたとする。$AB \cdots C$ の ij 成分は $x_{ij} = \sum_{1 \le s \le \alpha} \sum_{1 \le t \le \beta} \cdots \sum_{1 \le u \le \gamma} a_{is} b_{st} \cdots c_{uj}$ で与えられる。

$$\mathrm{Per}(A\, B\, \cdots\, C) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \cdots x_{\sigma(n)n}$$

である。さて，$I = (12 \cdots n)$ として，

$$\mathrm{Per}(A\, B\, \cdots\, C) = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{J \in \{1, 2, \cdots, \alpha\}^n} \sum_{K \in \{1, 2, \cdots, \beta\}^n} \cdots \sum_{L \in \{1, 2, \cdots, \gamma\}^n} \sum a_{\sigma\, IJ}\, b_{JK} \cdots c_{LI}$$

となる。$J=(j_1j_2\cdots j_n)$ のとき，

$$A_{\sigma IJ}=\mathrm{Per}\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)j_1} & a_{\sigma(1)j_2} & \cdots & a_{\sigma(1)j_n} \\ a_{\sigma(2)j_1} & a_{\sigma(2)j_2} & \cdots & a_{\sigma(2)j_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\sigma(n)j_1} & a_{\sigma(n)j_2} & \cdots & a_{\sigma(n)j_n} \end{pmatrix}=\sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma IJ}$$

と置く。

$$\mathrm{Per}(AB\cdots C)=\sum_{J\in\{1,2,\cdots,\alpha\}^n}\sum_{K\in\{1,2,\cdots,\beta\}^n}\cdots\sum_{L\in\{1,2,\cdots,\gamma\}^n} a_{IJ}b_{JK}\cdots c_{LI}$$

J が $\{1,2,\cdots,\alpha\}^n$ に含まれるとき，J に n_1，n_2，$\cdots$，n_p 個の重複元がそれぞれあるとする。ここに，$n_1+n_2+\cdots+n_p=n$ である。$n_J!=n_1!\,n_2!\,\cdots\,n_p!$ とかく。そのとき，

$$\mathrm{Per}(A\,B\,\cdots\,C)=\sum_J\sum_K\cdots\sum_L A_{IJ}\,\frac{1}{n_J!}B_{JK}\,\cdots\,\frac{1}{n_L!}C_{LI}$$

ここに，J は ${}_\alpha H_n$ 通りの $\{1,2,\cdots,\alpha\}$ から n 個重複を許して取り出す組み合わせの集合の元を並べた 1 つの組，重複順列とする。同様に，K は ${}_\beta H_n$ 通りの $\{1,2,\cdots,\beta\}$ から n 個重複を許して取り出す組み合わせの集合の元を並べた 1 つの組，重複順列とする。L は ${}_\gamma H_n$ 通りの $\{1,2,\cdots,\gamma\}$ から n 個重複を許して取り出す組み合わせの集合の元を並べた 1 つの組，重複順列とする。$n^\alpha=\sum_J\frac{\alpha!}{n_J!}$ に注意する。ただし，J は ${}_\alpha H_n$ 通りの和にわたる。

3 Remarks

注意 1. S_n から，可換環 R の乗法群 $R^\times$ への群の準同型 $\phi:S_n\to R^\times$ を考えると，S_n の交換子群 $[S_n,S_n]$ が A_n なので準同型 $S_n/A_n\to R^\times$ を通る。$S_n/A_n\cong\{\pm1\}$ なので，ϕ は *sgn* か自明な表現しかない。

注意 2. *[1]* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\cdots$, $\mathbf{e}_n$ を標準基底とする。$\mathbf{a}_1=\sum_j x_{1j}\mathbf{e}_j$, $\cdots$, $\mathbf{a}_n=\sum_j x_{nj}\mathbf{e}_n$ と任意のベクトルを 1 次結合でかくとき，

$$\mathrm{sym}(\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2,\,\cdots,\,\mathbf{a}_n)=\sum_{\sigma\in\mathrm{Map}(\{1,2,\cdots,n\},\{1.2,\cdots,n\})} a_{\sigma(1)1}\,a_{\sigma(2)2}\,\cdots\,a_{\sigma(n)n}$$

は列についての 1 つの対称形式である。$\mathrm{sym}({}^tA)\neq\mathrm{sym}(A)$ に注意する。

[2] n 次正方行列 A に対して，$n=n_1+n_2+\cdots+n_s$ と分割する。A の列を n_1, n_2, $\cdots$, n_s 個の列に分割する。それを X_1, X_2, $\cdots$, X_s の集合とし，J_1, J_2, $\cdots$, J_s をそれぞれ 1 つの順列とする。$\{1,2,\cdots,n\}$ から重複を許して n_1 個の元を取り出した集合を Y_1, 独立に，重複を許して n_2 個の元を取り出した集合を Y_2, 同様にして繰り返して, 最後に，独立に，重複を許して n_s 個の元を取り出した集合を Y_s とする。そのとき，Y_i の重複順列を I_i とし，Y_i の元の重複を重複 m_{i1}, m_{i2}, $\cdots$, m_{it_i}, $m_{i1}+m_{i2}+\cdots+m_{i\,t_i}=n_i$ とする。$m_{I_i}!=m_{i1}!m_{i2}!\cdots m_{it_i}!$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\mathrm{sym}(A)=\sum_{(I_1,I_2,\cdots,I_s)}\frac{1}{m_{I_1!}}A_{I_1J_1}\frac{1}{m_{I_2}!}A_{I_2J_2}\cdots\frac{1}{m_{I_s}!}A_{I_sJ_s}$$

[3] 各型がそれぞれ (n,α),(α,β),$\cdots$, (γ,n) 型の行列 A, B, $\cdots$,C が与えられたとする。このとき次が成り立つ。

$$\mathrm{sym}(A\,B\,\cdots\,C)=\sum_I\sum_J\sum_K\cdots\sum_L\frac{1}{n_I!}A_{IJ}\frac{1}{n_J!}B_{JK}\cdots\frac{1}{n_L!}C_{LI}$$

参考文献

[Bour] Nicolas Bourbaki, Algebra I: Chapters 1-3 (Elements of Mathematics), Springer, 1989 (reprint version, 1999).

[UM] Yoshiaki Ueno and Kazuhisa Maehara, An elementary proof of the generalized Laplace Expansion Formula, Academic Reports, vol.25, no.1(2002), Faculty of Engineering, Tokyo Polytechnic University, pp.61-63.